# Série 1

## Exercice S1E1* (15 min) : Analyse dimensionnelle

**L'analyse dimensionnelle** est un concept **utile pour vérifier l'exactitude d'une formule**. Elle peut aussi être utilisée pour émettre une hypothèse sur la relation entre plusieurs grandeurs physiques; hypothèse pouvant être ensuite vérifiée expérimentalement. L'unité de mesure et la dimension d'une grandeur physique sont liées, mais ce n'est pas la même chose. Les unités de mesure sont définies par des conventions (la Suisse utilise le système international d'unités, abrégé **SI**).

**À chaque grandeur physique correspond une dimension.** En mécanique la dimension d'une grandeur physique est une composition de la longueur (**L**), de la masse (**M**), et du temps (**T**). Dans la convention **SI** les unités de **L**, **M** et **T** sont respectivement mètre (**m**), kilogramme (**kg**), et seconde (**s**). Ces dimensions et unités servent comme base pour exprimer les dimensions et unités de toutes les autres grandeurs mécaniques.

Exemple avec la grandeur physique « vitesse » :

- La vitesse est une longueur divisée par un temps, sa dimension est donc : $[V] = [L]/[T]$
- L'unité de vitesse dans le système SI est le m/s (mètre par seconde)

*NB : la longueur peut avoir plusieurs unités, comme le pouce ou le mètre, mais elle a toujours la même dimension : L*

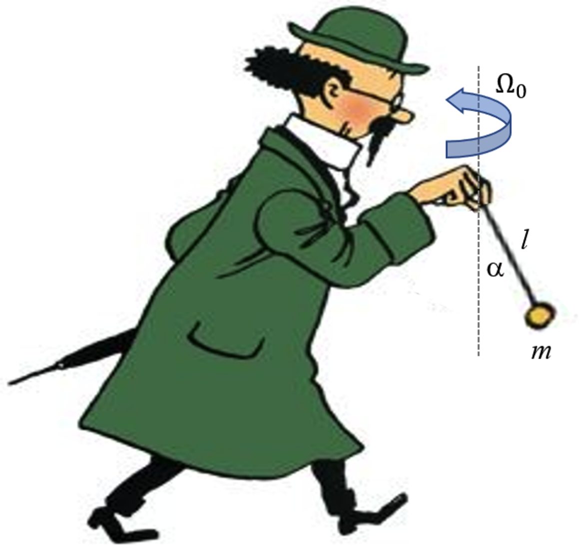
**Concepts de base de l'analyse dimensionnelle :**

1. Seules des grandeurs physiques avec les mêmes dimensions peuvent être additionnées, soustraites, comparées ou égalées.
2. Les grandeurs avec des dimensions différentes peuvent être seulement multipliées ou divisées.
3. Quand une grandeur est élevée à un exposant sa dimension est élevée au même exposant.
4. Les exposants sont toujours sans dimension.
5. De même, les fonctions mathématiques comme par exemple les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, etc., exigent des arguments sans dimension.
6. Toutes les équations doivent être homogènes : la dimension du côté gauche de l'égalité doit être la même que celle du côté droit.

**Application :**

a) On rappelle que la dimension d'une force est $[MLT^{-2}]$. Etant donné que la force de gravitation entre la Terre et un satellite s'écrit $F_{grav} = G\frac{m_T m}{r^2}$ avec $m_T$ la masse de la Terre, $m$ la masse du satellite, et $r$ la distance entre le centre de masses des deux objets, quelle est la dimension de la constante gravitationnelle $G$? En quelles unités SI peut-on alors exprimer G?

b) On définit la grandeur $\Omega_0$ comme la vitesse angulaire pour un mouvement de rotation. Lorsqu'on fait tourner la masse $m$ d'un pendule (celle-ci décrivant une trajectoire circulaire dans un plan et tournant à la vitesse angulaire $\Omega_0$), alors le fil de longueur $l$ forme un angle $\alpha$ par rapport à la verticale.




On peut démontrer grâce à la 2ème loi de Newton la relation suivante : $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g \tan\alpha}{l}}$ avec $g$ la norme du vecteur champ de pesanteur. Quelle est la dimension de $\Omega_0$?

c) Lors d'une résolution d'exercices, vous trouvez l'expression suivante pour une force centrifuge $F_c$ : $F_c = \frac{mv}{r}$, avec $m$ une masse, $v$ une vitesse, et $r$ une longueur. Cette expression est-elle juste au regard de l'analyse dimensionnelle? Si non, que faut-il modifier dans l'expression de $F_c$ pour que celle-ci soit correcte?

d) Au cours d'un autre exercice, l'énergie potentielle de pesanteur ($E_p$) d'un objet de masse $m$ est définie comme suit : $E_p = -mgh\cos\alpha$ avec $g$ l'intensité du champ de pesanteur, $h$ la hauteur de l'objet et $\alpha$ un angle. Quelle est la dimension de $E_p$?

## Exercice S1E2* (15 min) : Repère, distance, et vitesse

On veut étudier le mouvement d'un point $P$ se déplaçant sur une table.

a) Quel référentiel choisir pour l'étude de ce mouvement? Représentez un repère d'origine O dans un schéma et tracez une trajectoire quelconque.

b) Combien de paramètres sont nécessaires pour repérer la position d'un point sur la table? Dès lors, comment peut-on décrire la trajectoire du point $P$?

c) Soient deux points $A$ et $B$ situés sur la trajectoire du point $P$. Exprimez la distance entre $A$ et $B$ : celle-ci est-elle égale à la distance parcourue par $P$ entre $A$ et $B$?

d) On définit la vitesse suivante : $v_{AB} = \frac{AB}{\Delta t}$ où AB est la longueur du segment $[AB]$ et $\Delta t$ est le temps de trajet de $A$ à $B$. Pour une trajectoire rectiligne de A à B, omment appelle-t-on cette vitesse ? A-t-elle un lien avec la vitesse instantanée en A notée $v_A$ ?

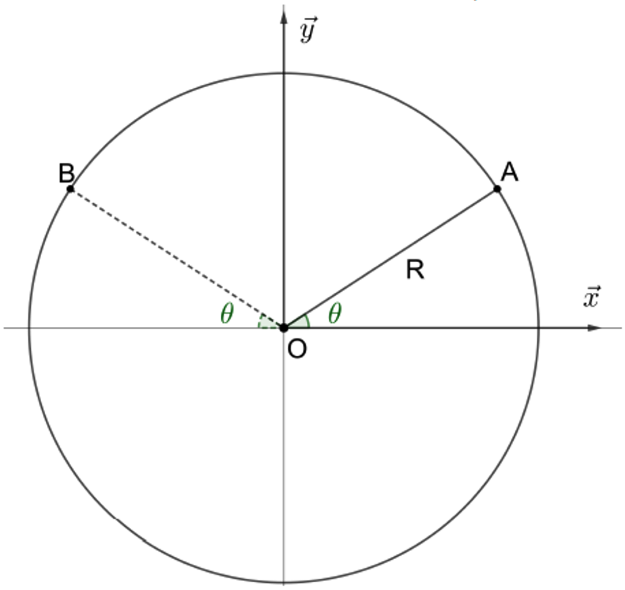
e) P est désormais situé entre A et B. Tracez le vecteur position $\overrightarrow{OP}$, ainsi que le vecteur vitesse en P noté $\overrightarrow{v_P}$.

# Exercice S1E3* (20 min) : Dérivées et intégrales

| **Dérivées par rapport à** $x$ $\left(\frac{d}{dx}\right)$ | **Dérivées par rapport à** $t$ $\left(\frac{d}{dt}\right)$ | **Intégrales** |
|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $\sin(\omega t)$ avec $\omega$ une constante | $\int gt\,dt$ avec $g$ constante |
| $\cos(x)$ | $\cos(t+c)$ avec $c$ une constante | $\int \cos(\omega t)\,dt$ avec $\omega$ constante |
| $\sin(2x)$ | $\sin(\omega t)$ avec $\omega$ fonction du temps | $\int \frac{dv}{v}$ |
| $x^3$ | $\sin(t)\cos(t)$ | $\int x^2\,dx$ |
| $x^{-3}$ | $\ln(t)$ | $\int v\,dv$ |
| $\sqrt{2x}$ | $e^{-\alpha t}$ avec $\alpha$ une constante | |
| $\frac{1}{x}$ | | |

# Exercice S1E4* (15 min) : Vecteurs - 1

On considère les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ suivants (A et B sont situés sur un cercle de centre $O$ et de rayon $R$) :




a) Exprimez les composantes de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction de $R$ et $\theta$.

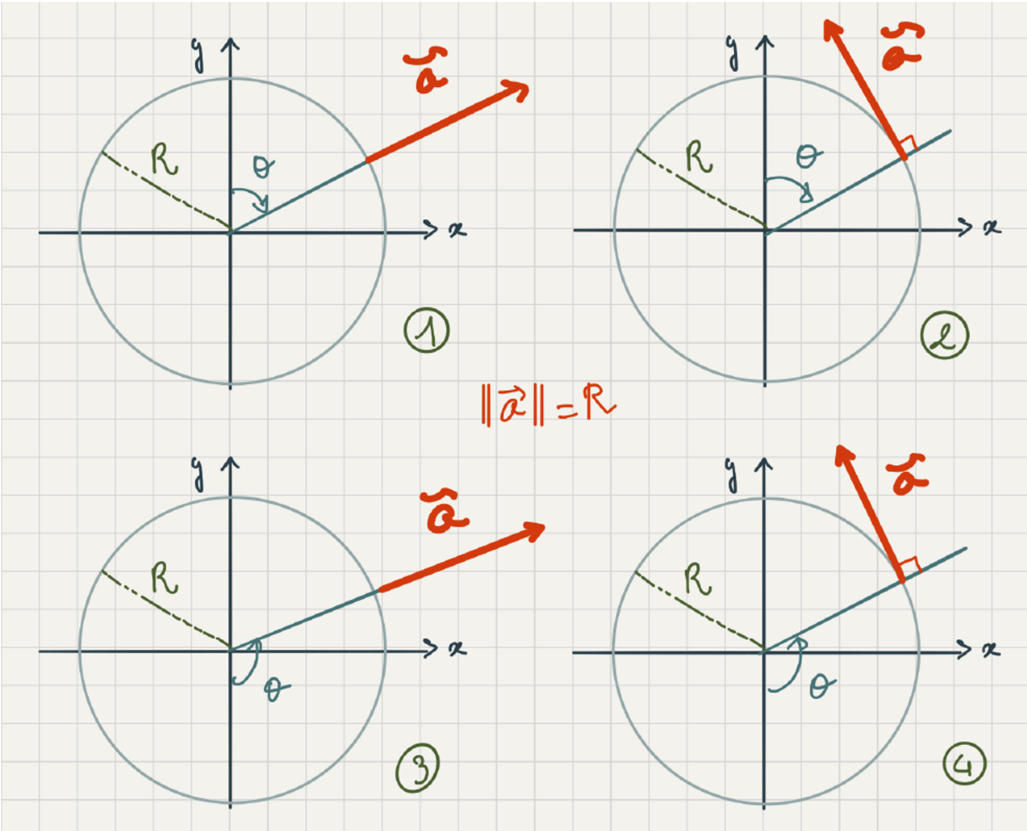
b) Représentez $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

c) Exprimez les composantes de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

d) Refaites le schéma avec $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

# Exercice S1E5* (15 min) : Vecteurs - 2

Exprimez les composantes du vecteur $\overrightarrow{a}$ en fonction de $R$ et $\theta$ (les angles $\theta$ sont tous positifs et $||\overrightarrow{a}||= R$) :

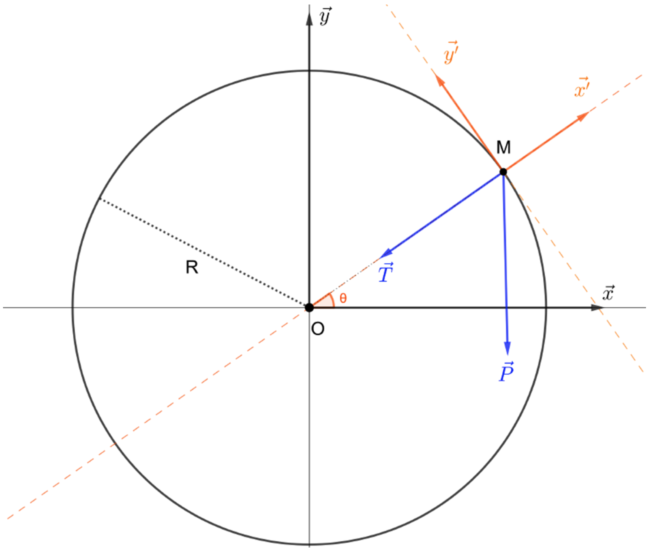



* * * * * * *

***Exercice supplémentaire***

# Exercice S1ES1* : Vecteurs - 3

Soit $M$ sur un cercle de rayon $R$. Soient les vecteurs $\overrightarrow{T}$ pointant vers $O$ et $\overrightarrow{P}$ parallèle à $Oy$ avec $\|\overrightarrow{T}\| = T$ et $\|\overrightarrow{P}\| = P$.




a) Donnez les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ en fonction de $R$, $T$, $P$ et $\theta$.

b) Donnez les composantes de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ dans le repère (M, $x'$, $y'$).